

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Начальник
учебно-методического отдела
Т.Ф. Артеменко**

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Теория чисел
по направлению:	Математика
профиль подготовки:	Фундаментальная математика Высшая школа современной математики Высшая школа современной математики
курс:	2
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 54 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 144, всего зач. ед.: 4

Программу составили:

А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

М.А. Цфасман, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании Высшая школа современной математики 02.09.2024

Аннотация

Самая классическая математическая дисциплина – теория чисел – продолжает активно развиваться. Цель курса – ознакомить студентов с базовыми понятиями и основными результатами классической теории чисел, вводя только те технические понятия и методы, которые для этого строго необходимы. Основное внимание уделяется таким понятием, как простые числа, арифметические функции, основы диофантовой геометрии, символ Лежандра. Курс доводится до закона распределения простых чисел, метода тригонометрических сумм, дзета-функций Римана и Дедекинда. Теория диофантовых приближений, алгебраическая теория чисел и теория полей классов изучаются в последующих специальных курсах.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Формирование фундаментальных знаний по теории чисел (в частности. арифметическим функциям и диофантовым уравнениям) для дальнейшего использования в других математических дисциплинах; формирование математической культуры, исследовательских навыков и способности применять знания на практике.

Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области теории чисел;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в применении алгебраических методов в других математических дисциплинах.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов

ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Основные понятия теории чисел, в том числе арифметические функции, теоремы о распределении простых чисел и диофантовых уравнениях.

уметь:

Уметь разбирать конкретные примеры и проводить необходимые теоретико-числовые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельной работы с простыми числами, квадратичными вычетами, владеть аналитическими и простейшими алгебраическими методами.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Простые числа.	2	2		4
2	Арифметические функции.	2	2		4
3	Число и сумма делителей натурального числа	2	2		4
4	Китайская теорема об остатках.	2	2		4
5	Лемма Гензеля.	2	2		4
6	Квадратичные вычеты.	2	2		4
7	Символы Лежандра и Якоби	2	2		4
8	Квадратичный закон взаимности.	2	2		4
9	Первообразные корни.	2	2		4
10	Распределение простых чисел в натуральном ряду.	2	2		3
11	Метод тригонометрических сумм в теории чисел	2	2		3
12	Дзета-функция Римана.	2	2		3
13	Характеры, ряды, L-функции Дирихле и их свойства.	2	2		3
14	Метод И. М. Виноградова в теории дзета-функции Римана.	2	2		3
15	Дзета-функция Дедекинда.	2	2		3
Итого часов		30	30		54
Подготовка к экзамену		30 час.			

Общая трудоёмкость	144 час., 4 зач.ед.
--------------------	---------------------

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Простые числа.

Простые числа.

Формулы простых чисел.

Многочлены, порождающие простые числа.

Теорема Дирихле об арифметических прогрессиях.

Числа Ферма.

Числа Мерсенна.

2. Арифметические функции.

Арифметические функции.

Мультипликативные функции.

Функция Мебиуса.

Формула обращения Мебиуса.

3. Число и сумма делителей натурального числа

Число и сумма делителей.

Функция Эйлера.

Средние значения арифметических функций.

Проблема делителей Дирихле и проблема Гаусса о числе целых точек в круге.

4. Китайская теорема об остатках.

Китайская теорема об остатках.

Решения полиномиального сравнения.

5. Лемма Гензеля.

Подъем решений полиномиального сравнения.

Лемма Гензеля.

6. Квадратичные вычеты.

Сравнения второй степени.

Квадратичные вычеты.

Критерий Эйлера.

7. Символы Лежандра и Якоби

Символ Лежандра.

Символ Якоби.

8. Квадратичный закон взаимности.

Лемма Гаусса.

Квадратичный закон взаимности.

9. Первообразные корни.

Существование первообразных корней по простому модулю.
Приложение к криптографии.

10. Распределение простых чисел в натуральном ряду.

Считающая функция простых чисел и ее асимптотика.
Теорема Чебышева.
Постулат Бертрана.

11. Метод тригонометрических сумм в теории чисел

Интеграл Виноградова.
Оценки интеграла Виноградова.

12. Дзета-функция Римана.

Дзета-функция Римана.
Тождество Эйлера.
Теоремы о нулях дзета-функции и доказательство асимптотического закона распределения простых чисел.

13. Характеры, ряды, L-функции Дирихле и их свойства.

Характеры, ряды, L-функции Дирихле и их свойства.
Доказательство теоремы Дирихле об арифметических прогрессиях.
Доказательство асимптотического закона распределения простых чисел в арифметических прогрессиях.

14. Метод И. М. Виноградова в теории дзета-функции Римана.

Метод И. М. Виноградова в теории дзета-функции Римана.
Теорема о среднем.
Оценка дзетовой суммы.
Многомерная проблема делителей Дирихле.

15. Дзета-функция Дедекинда.

Дзета-функция Дедекинда.
Тождество Эйлера.
Фундаментальная область.
Число классов дивизоров квадратичного и кругового поля.
Проблема делителей Дирихле в числовых полях.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Основы теории чисел [Текст] : учеб. пособие для вузов / И. М. Виноградов .— 11-е изд., стереотип. — СПб. : Лань, 2006 .— 176 с.

Дополнительная литература

1. Конкретная математика. Основание информатики [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник ; пер. с англ. Б. Б. Походзея, А. Б. Ходулева ; под ред. А. Б. Ходулева .— М. : Мир, 1998 .— 703 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<https://old.mccme.ru/ium/courses.php>

<https://library.mccme.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных и практических (семинарских) занятиях могут использоваться мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций, а также технологии дистанционной аудиовидеоконференцсвязи.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Методические указания приводятся в разрабатываемых аудиторных и домашних раздаточных материалах (листочках).

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Математика
профиль подготовки:	Фундаментальная математика Высшая школа современной математики Высшая школа современной математики
курс:	<u>2</u>
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Разработчики:

А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

М.А. Цфасман, д-р физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория чисел» обучающийся должен:

знать:

Основные понятия теории чисел, в том числе арифметические функции, теоремы о распределении простых чисел и диофантовых уравнениях.

уметь:

Уметь разбирать конкретные примеры и проводить необходимые теоретико-числовые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельной работы с простыми числами, квадратичными вычетами, владеть аналитическими и простейшими алгебраическими методами.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по материалу предыдущего занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Простые числа. Формулы простых чисел. Многочлены, порождающие простые числа. Теорема Дирихле об арифметических прогрессиях. Числа Ферма. Числа Мерсенна
2. Арифметические функции. Мультипликативные функции. Функция Мебиуса, формула обращения Мебиуса
3. Число и сумма делителей. Функция Эйлера. Средние значения арифметических функций. Проблема делителей Дирихле и проблема Гаусса о числе целых точек в круге
4. Китайская теорема об остатках. Решения полиномиального сравнения
5. Подъем решений полиномиального сравнения. Лемма Гензеля
6. Сравнения второй степени. Квадратичные вычеты. Критерий Эйлера
7. Символ Лежандра. Символ Якоби
8. Лемма Гаусса. Квадратичный закон взаимности
9. Первообразные корни. Существование первообразных корней по простому модулю. Приложение к криптографии
10. Распределение простых чисел в натуральном ряду: считающая функция и асимптотика. Теорема Чебышева. Постулат Бертрана
11. Метод тригонометрических сумм в теории чисел
12. Дзета-функция Римана. Тождество Эйлера. Теоремы о нулях дзета-функции и доказательство асимптотического закона распределения простых чисел
13. Характеристики, ряды, L-функции Дирихле и их свойства. Доказательство теоремы Дирихле об арифметических прогрессиях. Доказательство асимптотического закона распределения простых чисел в арифметических прогрессиях
14. Метод И. М. Виноградова в теории дзета-функции Римана, теорема о среднем. Оценка дзетовой суммы. Многомерная проблема делителей Дирихле
15. Дзета-функция Дедекинда. Тождество Эйлера. Фундаментальная область. Число классов дивизоров квадратичного и кругового поля. Проблема делителей Дирихле в числовых полях

Пример экзаменационного билета:

- 1) Функция Мебиуса. Формула обращения
- 2) Интеграл Виноградова

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 40 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не может продолжаться более двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена обучающимся запрещается пользоваться помощью других лиц и мобильными телефонами, разрешается пользоваться программой учебной дисциплины и справочной литературой по выбору экзаменатора.